Lösungen zu den Tutoriumsaufgaben

T1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $y + 1 - \cos(y) - xy = 0$ lokal bei $(0, 0)$ nach y auflösbar ist. Berechnen Sie $g'(0)$ für so eine Auflösung $y = g(x)$.

Lösung: Nach dem Satz über implizite Funktionen (Satz 2.61), ist $f := y+1-\cos(y)-xy$ genau dann nach y auflösbar, wenn die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ invertierbar ist. Da hier die partielle Ableitung nach y ein Element der reellen Zahlen ist, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \in \mathbb{R}$, ist diese bereits invertierbar, wenn sie ungleich 0 ist. Es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + \sin(y) - x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1 + \sin(0) + 0 = 1 \neq 0$$

Also ist f in $(0, 0)$ nach y auflösbar. Ebenfalls liefert der Satz über implizite Funktionen eine Möglichkeit, die Steigung $g'(0)$ zu berechnen, ohne die explizite Darstellung $g(x)$ bestimmen zu müssen. Es gilt:

$$g'(0) = Dg(0) = -(\frac{\partial f}{\partial y}(0, g(0)))^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0, g(0))$$

N.V. ist $g(0) = 0$, damit berechnen wir noch:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = (-y)|_{(0,0)} = 0$$

und wir erhalten als Ergebnis:

$$g'(0) = -1 \cdot 0 = 0$$

T2. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ xz + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

lokal bei $(0, 1, -1)$ nach (y, z) auflösbar ist. Bestimmen Sie $D_g(0)$ für so eine Auflösung $(y, z) = g(x)$.

Lösung: Definiere zunächst eine Funktion $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ xz + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dann sind die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt. Analog zur ersten Aufgabe wird wieder die Invertierbarkeit der partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y,z}(0,1,-1)$ untersucht. Anders als oben ist die partielle Ableitung hier aber eine 2×2-Matrix. Diese ist genau dann invertierbar, wenn die entsprechende Matrixabbildung bijektiv ist, also wenn die Matrix vollen Rang hat (Determinante ungleich null). Wir berechnen also zunächst die partielle Ableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial y,z}(0,1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} |_{(0,1,-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Determinante dieser Matrix ist ungleich null, somit ist das Gleichungssystem bei $(0,1,-1)$ lokal nach (y,z) auflösbar. Nun berechnen wir zur Bestimmung von $D_g(0,1,-1)$ noch die partielle Ableitung in x-Richtung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,-1) = \begin{pmatrix} 2 \\ z \end{pmatrix} |_{(0,1,-1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen ist $D_g(0,1,-1)$ dann wie folgt gegeben:

$$D_g(0,1,-1) = -(\frac{\partial f}{\partial y,z}(0,1,-1))^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,1,-1) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

T3. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$.

(a) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der Funktion f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion f auf der Einheitskreisscheibe $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$

Lösung (a): Wir lösen die Aufgabe mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren (s. Satz 2.64). Für die Nebenbedingung (NB) g soll $g = 0$ gelten, also formulieren wir g als $g := x^2+y^2-1$. Aus $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$ und der NB erhalten wir folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda 2x \\ -2y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir, dass entweder $\lambda = 1$ oder $x = 0$ sein muss. Falls also $\lambda = 1$ so folgt aus der zweiten Gleichung, dass $y = 0$ und damit in der dritten Gleichung, dass $x = \pm 1$ ist. Somit ist $(\pm 1, 0)$ ein Kandidat für ein Extremum. Sei weiter $x = 0$, dann folgt in der zweiten Gleichung $\lambda = -1$ und damit $y = \pm 1$. Somit sind auch $(0, \pm 1)$ Kandidaten für Extrema. Durch Einsetzen erhalten wir $f(\pm 1, 0) = 1$ und $f(0, \pm 1) = -1$. Also sind $(\pm 1, 0)$ die Maximalstellen und $(0, \pm 1)$ die Minimalstellen.

Lösung (b): Wir betrachten analog zu (a) wieder einen Kreis als NB, dieses Mal jedoch mit einem beliebigen Radius r. Damit ist die NB $g := x^2 + y^2 - r^2$. Die Gleichungen und Überlegungen sind dann komplett analog zu (a), bis auf den Unterschied, dass statt $(\pm 1, 0)$ bzw. $(0, \pm 1)$ die Extremalstellen $(\pm r, 0)$ bzw. $(0, \pm r)$ untersucht werden. Die resultierenden Minima bzw. Maxima sind dann $\pm r^2$, woraus klar wird, dass die Maxima größer bzw. die Minima kleiner werden, je größer der betrachtete Kreis wird. Also treten die Extrema von f auf der Einheitskreisscheibe genau auf dem größten enthaltenen Kreis (also dem Einheitskreis) auf. Damit sind die Extrema von f auf der Einheitskreisscheibe genau die Extrema von f auf dem Einheitskreis, also analog zu (a) $(\pm 1, 0)$ und $(0, \pm 1)$